Facit · Stigen på papir

Svarene er regnet af forløbets egne funktioner (stigen/indhold.js): de rene forhold (RENE), overtonerne, der mødes (overtonepar), de tre regnestykker (gjortOp), delingerne (bedsteTrin, delingGjortOp, ventetSvaevning) og stigerne (STIGER, afvigelser). Spor ● regner med kvinten rundet til 702 cent, ●● og ●●● med to decimaler; skærmen regner med alle decimaler, og en fejl kan derfor stå 0,1 cent anderledes dér. Gulvet: «Fem lige trin» har 0 trin på en tangent (alle fire ligger mellem to); slendro og fem lige trin er længst fra hinanden ved trin 1 (0,9 cm, 9 cent). Kvintstien med 70,2 cm: 1: 70,2 cm (G), 2: 20,4 cm (D), 3: 90,6 cm (A), 4: 40,8 cm (E), 5: 111 cm (H), 6: 61,2 cm (F♯), 7: 11,4 cm (C♯), 8: 81,6 cm (G♯), 9: 31,8 cm (D♯), 10: 102 cm (A♯), 11: 52,2 cm (F), 12: 2,4 cm (C). Skridt 12 lander 2,4 cm fra C (præcist 2,35 cm = det pythagoræiske komma på 23,46 cent), så stien kommer ikke hjem; den har været på alle tolv tangenter. Regnekortet «Prøv selv»: en stor og en lille terts er tilsammen en kvint, 5/4 × 6/5 = 3/2 og 386 + 316 = 702 cent.

Spor ● (fx 7. klasse)

Side 1 · Find de stille steder

1. **Hvor står det stille?** 1: 220 × 3 ÷ 2 = 330 Hz (kvint) 2: 220 × 5 ÷ 4 = 275 Hz (stor terts)
   3: 220 × 6 ÷ 5 = 264 Hz (lille terts)
2. **Hvor mødes overtonerne?** 1: 330 Hz: 330, 660, 990, 1320, 1650, 1980; i begge rækker: 660 og 1320
   2: 275 Hz: 275, 550, 825, 1100, 1375, 1650; i begge rækker: 1100

Side 2 · Regn kommaet

1. **Kvint efter kvint:** skridt 2: 330 × 1,5 = 495 → ÷ 2 = 247,5 Hz skridt 3: 247,5 × 1,5 = 371,25 Hz
   skridt 4: 371,25 × 1,5 = 556,875 → ÷ 2 = 278,4375 Hz (278,44)
2. **Hvilken tangent?**
   skridt 2 (247,5 Hz): D; skridt 3 (371,25 Hz): A; skridt 4 (278,44 Hz): E; skridt 12 (223,00 Hz): C, men 3,00 Hz over 220. C, G, D, A og E er femtoneskalaen («Fem af de tolv» i del 4)

Side 3 · Del oktaven

1. **Hvor store er trinene?** 1: 1200 ÷ 5 = 240 cent 2: 1200 ÷ 24 = 50 cent 3: 1200 ÷ 7 = 171,4 cent
2. **Hvor er kvinten?** 1: 5 trin: trin 3 = 720 cent; 720 − 702 = +18: 18 cent for høj
   2: 7 trin: trin 4 = 685,7 cent; 685,7 − 702 = −16,3: 16,3 cent for lav
   3: 19 trin: trin 11 = 694,7 cent; 694,7 − 702 = −7,3: 7,3 cent for lav

Spor ●● (fx 8. klasse)

Side 1 · Find de stille steder

1. **Hvor står det stille?** 1: 220 × 4 ÷ 3 = 293,33 Hz; 4 × 220 = 3 × 293,33 = 880 (kvart)
   2: 220 × 5 ÷ 4 = 275 Hz; 5 × 220 = 4 × 275 = 1100 (stor terts)
   3: 220 × 5 ÷ 3 = 366,67 Hz; 5 × 220 = 3 × 366,67 = 1100 (stor sekst)
2. **Hvor mange svævninger?** 1: 441 Hz: 2 × 220 = 440 og 1 × 441 = 441; 1 svævning i sekundet
   2: 331 Hz: 3 × 220 = 660 og 2 × 331 = 662; 2 svævninger i sekundet
   3: 276 Hz: 5 × 220 = 1100 og 4 × 276 = 1104; 4 svævninger i sekundet

Side 2 · Regn kommaet

1. **Potenserne:**
   $(3/2)^4 = 81/16 = 5{,}0625$; $(3/2)^{12} = 531441/4096 = 129{,}7463$; $2^7 = 128$; 129,75 ÷ 128 = 1,0136; 220 × 1,0136 = 223,0 Hz
2. **Tre store tertser:**
   2 tertser: 343,75 Hz; 3 tertser: 429,69 Hz; nej, 10,31 Hz under 440; $(5/4)^3 = 125/64 = 1{,}953$, ikke 2

Side 3 · Del oktaven

1. **Kvint og terts:** 1: 19 trin: 63,16 cent pr. trin; kvint trin 11 = 694,74, −7,22; stor terts trin 6 = 378,95, −7,36
   2: 22 trin: 54,55 cent pr. trin; kvint trin 13 = 709,09, +7,13; stor terts trin 7 = 381,82, −4,49
   3: 31 trin: 38,71 cent pr. trin; kvint trin 18 = 696,77, −5,19; stor terts trin 10 = 387,1, +0,79. Bedste terts: 31 trin
2. **Svæver kvinten?** 1: 5 trin: 2 × 333,46 = 666,92; 3 × 220 = 660; 6,92 svævninger i sekundet
   2: 7 trin: 2 × 326,92 = 653,84; 3 × 220 = 660; 6,16 svævninger i sekundet
   3: 19 trin: 2 × 328,63 = 657,26; 3 × 220 = 660; 2,74 svævninger i sekundet

Spor ●●● (fx 9. klasse)

Side 1 · Find de stille steder

1. **Skru, til den svæver:**
   1: kvint (3:2), 3 gange: 331,5 Hz eller 328,5 Hz (3 × 220 = 660; 2 × tonen skal være 663 eller 657)
   2: stor terts (5:4), 4 gange: 276 Hz eller 274 Hz (5 × 220 = 1100; 4 × tonen skal være 1104 eller 1096)
2. **Hvorfor står den stille?**
   Kriterier: 3 × 220 = 660 og 2 × 330 = 660: overtonerne mødes præcis, så der er intet at svæve med; 2 × 335 = 670 ligger 10 Hz fra 660, og forskellen mellem de to overtoner er svævningerne i sekundet; jo simplere brøken er, jo tidligere i overtonerne mødes de (3/2: allerede ved 660 Hz).

Side 2 · Regn kommaet

1. **Fire kvinter mod én terts:**
   $(3/2)^4 \div 2^2 = 81/64$; 220 × 81/64 = 278,44 Hz; 81/64 ÷ 5/4 = 81/80; klaverets 277,18 Hz er tættest på kvinternes (1,26 Hz fra, mod 2,18 Hz fra den rene)
2. **Kommaerne i cent:**
   1: Tre store tertser: 3 × 386,314 = 1158,94; målet 1200; resten −41,06 cent (den lille diesis)
   2: Fire kvinter mod én terts: 4 × 701,955 = 2807,82; målet 2786,31; resten +21,51 cent (det syntoniske komma)

Side 3 · Del oktaven

1. **Samme kvint:**
   19 trin: trin 11 = 694,7 cent, ikke samme; 36 trin: trin 21 = 700 cent, samme; 48 trin: trin 28 = 700 cent, samme. Hvorfor: 24, 36 og 48 er 12 gange et helt tal, så hvert 2., 3. og 4. trin er et af klaverets trin, og klaverets kvint på 700 cent er med; 19 er ikke
2. **53 trin:** 1: stor terts (386,31 cent): trin 17 = 384,91 cent, −1,4 cent
   2: lille terts (315,64 cent): trin 14 = 316,98 cent, +1,34 cent

Side 4 · Tænk efter

1. **Hvorfor tolv tangenter?**
   53 × 701,955 = 37203,62; 31 × 1200 = 37200; resten 3,62 cent; 3,62 ÷ 53 = 0,07 cent: 53-delingens kvint er 0,07 cent for lav. Kriterier: 53 tangenter i en oktav kan man ikke spille på med fingre (forløbet om 53 trin); 12 er det mindste antal trin, hvor kvinten er under 3 cent fra ren; færre trin giver en kvint, der svæver hørbart; jo flere trin, jo flere og smallere tangenter; 12 er et kompromis mellem en god kvint og et instrument, man kan spille på.